Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

Blatt 9

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 07.01, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 9.1 (7 + 3 Punkte) Wir betrachten die Punkten $P = [1,2,1], P' = [1,1,1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und die Geraden

$$L = \{x_0 - x_1 = 0\}, \qquad L' = \{x_0 + x_1 = 0\}$$
$$M = \{x_0 + x_1 + x_2 = 0\}, \qquad M' = \{x_1 + x_2 = 0\}$$

Finden Sie alle projektive Transformationen $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ so dass $f(P) = P', f(L) = L', f(M) = M'$.

(i) Finden Sie eine projektive Transformation $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ so dass $f(P) = P', f(L) = L', f(M) = M'$.

(ii) Ist eine solche eine projektive Transformation eindeutig?

Aufgabe 9.2 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ entweder $1, 2$ oder unendliche viele Fixpunkte hat.

Aufgabe 9.3 (2 + 4 + 4 + 5 Punkte) Wir betrachten die Gruppe $PGL_2(\mathbb{Q})$ von alle Möbiustransformationen $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Wir können jede Möbiustransformation als gebrochene lineare Funktion betrachten

$$f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}), \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Q}, ad - bc \neq 0$$

Wir betrachten auch die Menge $S = \{0, 1, -1, \infty\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Sei

$$G = \{f \in PGL_2(\mathbb{Q}) \mid f(S) = S\}$$

(i) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $PGL_2(\mathbb{Q})$ ist.

(ii) Sei $f \in G$ so dass $f(-1) = -1$. Zeigen Sie, dass $f(z) = z$ oder $f(z) = \frac{1}{z}$. [*Hinweis:* die anharmonische Gruppe kann hilfreich sein].

(iii) Finden Sie $f_0, f_1, f_\infty \in G$ so dass $f_0(-1) = 0, f_1(-1) = 1, f_\infty(-1) = \infty$.

(iv) Finden Sie alle Elementen von G [*Hinweis:* Nutzen Sie die Punkte (ii) und (iii)].
